

Kinderen van de Kosmos

SPELING IN HET WETENSCHAPPELIJKE RADERWERK

door Sylvia Wenmackers

*KU Leuven, België
& RuGroningen, Nederland*

4 maart 2015 (vertaald op 16 juli 2015)

SAMENVATTING

Onze wiskundige modellen kunnen ons onredelijk effectief toeschijnen, maar enkel als we vergeten in rekening te brengen wie wij zijn: wij zijn de kinderen van deze Kosmos. We zijn hier geboren en we kennen onze weg in deze contreien van de Melkweg, ook al beseffen we niet altijd wat voor een wonderlijke verwezenlijking dat is.

“[A] onze wetenschap, afgemeten aan de werkelijkheid, is primitief en kinderlijk – en toch is het het meest waardevolle dat we hebben.”
– Albert Einstein¹

“[I]k lijk slechts een jongen te zijn geweest die aan zee op het strand speelde, en zichzelf amuseerde met nu en dan een gladder keitje te vinden of een mooiere schelp dan gewoonlijk, terwijl de grote oceaan der waarheid zich onontdekt voor me uitstreckte.”
– Isaac Newton²

Wiskunde kan onredelijk effectief lijken in de natuurwetenschappen, vooral in de fysica [4]. In dit essay argumenteer ik dat dit oordeel, minstens ten dele, toegeschreven kan worden aan selectie-effecten. Ter ondersteuning van deze centrale bewering voer ik vier elementen aan. Het eerste element is dat wij wezens zijn die geëvolueerd zijn binnen dit universum en dat onze vermogens om patronen op te sporen geselecteerd zijn door diezelfde omgeving. Het tweede element is dat onze wiskunde – hoewel niet volledig ingeperkt door de natuurlijke wereld – sterk geïnspireerd wordt door onze waarneming van die wereld. Het derde element bekritiseert de gebruikelijke waardering van de efficiëntie van wiskunde. Onze focus op de zeldzame successen maakt ons blind voor de alomtegenwoordige mislukkingen (selectievertekening). Het vierde element is dat het proces van het toepassen van wiskunde veel meer vrijheidsgraden verschaft dan de vrijheidsgraden die er binnen de wiskunde zelf zijn. Dit laatste element zal geïllustreerd worden door het gebruik van ‘infinitesimalen’ in de context van wiskunde en fysica. Maar eerst zet ik kort mijn visie op natuurwetenschap en wiskunde uiteen, omdat deze het canvas vormen waarop ik mijn centrale stelling uitteken.

¹ [1, p. 404] (vertaling SW).

² [2, p. 54] (vertaling SW). Toegeschreven aan Isaac Newton kort voor diens dood (dus in 1727 of kort ervoor), uit een anecdote die wordt toegeschreven aan [A. M.] Ramsey door J. Spence [2]. Zie ook voetnoot 31 in [3].

1. Speelgoedmodel van de wetenschap

Wetenschap kan je zien als een langdurige en collectieve poging om een enorme puzzel te leggen. De puzzelstukken zijn onze ervaringen (met name degene die intersubjectief verifieerbaar zijn) en onze redeneringen daarover (vaak in de vorm van wiskundige modellen en theorieën). Het zoeken naar bijkomende stukjes maakt deel uit van het spel. Elk stukje dat gelegd wordt, kan later weer verplaatst worden, want “de tafel plakt niet”. Niemand weet hoeveel stukjes er zijn, wat de vorm van de rand is en of de stukjes überhaupt wel bij dezelfde puzzel behoren. We gaan er optimistisch vanuit dat dit inderdaad zo is en proberen alle delen van de puzzel die al gelegd zijn met elkaar te verbinden.³

Net als Einstein en (naar verluidt) Newton in de citaties op het titelblad zie ik wetenschap dus als een speelse en beperkte activiteit, die tezelfdertijd hoogst waardevol en nooit eerder gezien is. Wetenschappelijke kennis is feilbaar, maar er is geen betere manier om kennis te verwerven. Bijgevolg lijkt het dus wijs om onze epistemische ondernemingen (zoals filosofie) te baseren op wetenschap: deze positie staat bekend als het ‘naturalisme’. Bovendien is er geen meer betrouwbare fundering voor wetenschappelijke kennis buiten de wetenschap zelf. De kentheoretische positie van het ‘coherentisme’ verleent steun aan het positieve en optimistische project van de wetenschap. Het is het meest beeldend verwoord door Otto Neurath [7, p. 206]:

“Als zeelieden zijn we, die hun schip op open zee moeten verbouwen, zonder het ooit in een dok te kunnen demonteren en met de beste materialen opnieuw opbouwen.”⁴

We zitten er middenin en de luxe van een verse start wordt ons niet vergund. Bijgevolg kunnen we de schijnbaar onredelijke effectiviteit van wiskunde in de natuurwetenschappen evenmin vanuit een beter uitgangspunt analyseren. Veroordeeld zijn we om deze kwestie te ontcijferen vanuit het onvolledige beeld dat tevoorschijn komt uit de wetenschappelijke puzzel zelf, terwijl de stukjes ervan blijven bewegen. Een duizelingwekkende ervaring.

Aangezien ik in het bovenstaande al heb verwezen naar “wiskundige modellen en theorieën” moet ik ook mijn visie daarop toelichten.⁵ Voor mij is wiskunde een langdurige en collectieve poging tot systematisch denken over hypothetische structuren – of denkbeeldige puzzels, zo je wil. (Meer hierover in sectie 2.2.)

2. Selectie-effecten achter de vermeende effectiviteit van wiskunde in natuurkunde

De vier elementen die in deze sectie naar voren worden gebracht onderbouwen samen mijn deflatoire conclusie: dat de effectiviteit van wiskunde niet erg verrassend is en evenmin onredelijk.

³ Al puzzelend vertellen we verhalen over onze wereld, want daar gaat wetenschap uiteindelijk over. “De antropologen hadden het mis toen ze onze soort *Homo sapiens* (‘wijze man’) noemden. Het is in elk geval arrogant en verwaand om dit te zeggen, aangezien wijsheid één van onze minst zichtbare eigenschappen is. In werkelijkheid zijn we *Pan narrans*, de verhalen vertellende chimpansee.” — Ian Stewart, Jack Cohen, en Terry Pratchett (2002) [6, p. 32]. (vertaling SW)

⁴ Dit is mijn vertaling van het Duitse citaat [7, p. 206]: “*Wie Schiffer sind wir, die ihr Schiff auf offener See umbauen müssen, ohne es jemals in einem Dock zerlegen und aus besten Bestandteilen neu errichten zu können.*”

⁵ In de huidige context maak ik weinig onderscheid tussen modellen enerzijds en theorieën anderzijds. Raadpleeg voor een meer gedetailleerde bespreking van wetenschappelijke modellen referentie [5].

2.1 Natuurlijke historie der wiskundigen

Dit deel behandelt de twee volgende vragen. Wat stelt ons überhaupt in staat om aan wiskunde te doen? En hoe komt het dat we niet enkel fenomenen in de wereld kunnen beschrijven met wiskunde, maar dat we er zelfs latere waarnemingen mee kunnen voorspellen? Ik denk dat we onszelf een rad voor de ogen draaien als we niet in rekening brengen in welke hoge mate wijzelf – als biologische soort en met onze cognitieve capaciteiten die ons in staat stellen wiskunde te ontkwamen – geselecteerd zijn aan deze werkelijkheid.

Dit essay is oorspronkelijk geschreven naar aanleiding van een wedstrijd met als thema *'trick or truth'*: is wiskundig succes in de fysica een kunstje dan wel een diepe waarheid (of iets helemaal anders)? Om deze vraag te beantwoorden – en in de geest van het naturalisme en het coherentisme uit sectie 1 –, moeten we de verschillende delen van de puzzel met elkaar verbinden. In de tijd van het antieke Griekenland waren er heel wat minder stukjes voor handen dan nu. Plato was bij de eersten om parallelle werelden te postuleren: naast onze materiële wereld, bevolkt door imperfecte concrete dingen, veronderstelde hij een wereld van universele Ideeën of ideale Vormen, alwaar de wiskundige Ideeën op hun glorieuze troon van abstracte perfectie zaten.⁶ In deze visie is onze dagdagelijkse wereld slechts een zwakke afschaduw van de wereld der perfecte Vormen. Onze kennis van de wiskunde wordt dan toegeschreven aan herinneringen die onze ziel nog meedraagt uit een gelukkigere tijd, waarin zij nog niet gevangen zat in een lichaam en haar uitzicht nog niet werd gehinderd door bedrieglijke zintuigen.

Deze grootse visie van een abstracte wereld voorbij de onze heeft de natuurfilosofie sindsdien zwaar getekend. De tijd is rijp om dit standpunt te laten rusten en te zoeken naar betere antwoorden, geleid door de wetenschap. Hoewel er ook nu nog grote delen van de puzzel ontbreken, lijkt het me toch duidelijk dat we inmiddels in een betere positie zijn dan de antieke Atheense geleerden om de contouren van het antwoord op de uitgangsvraag te ontwaren.

Laten we eerst inventariseren wat er op tafel ligt met betrekking tot de vraag waar onze wiskundige kennis vandaan komt. Is wiskundige kennis inderdaad aangeboren, zoals Plato's leer impliceerde? Volgens de hedendaagse wetenschappelijke opvattingen zit het iets subtieler in elkaar: wiskundige kennis is niet aangeboren (helaas, anders zouden we niet zo'n grote moeite hebben om wiskunde te leren of te onderwijzen), maar er zijn wel robuuste bevindingen die aantonen dat zeer jonge kinderen (en ook niet-menselijke dieren, trouwens) over bepaalde numerieke vaardigheden beschikken [8, 9]. We hebben dus aangeboren cognitieve vaardigheden, die ons in staat stellen om te leren tellen en – met grotere inspanning – om ook meer abstracte wiskunde te bestuderen of zelf te ontwikkelen.

Dit roept vervolgens de vraag op naar de oorsprong van deze vermogens. Om dat te beantwoorden, steunen we op het coherente beeld van de wetenschap, dat ons zegt: als onze zintuigen en redeneringen helemaal niet werkten, niet minstens in goede benadering voldoende om te overleven, dan zouden onze voorgangers niet lang genoeg geleefd hebben om nageslacht voort te brengen en dan zouden wij hier niet zijn geweest. Onder de eigenschappen die geselecteerd zijn hebben onze voorouders bepaalde cognitieve vermogens aan ons doorgegeven (net als eraan verwante gebreken: verderop meer hierover). Vanuit dit standpunt danken we onze aangeboren numerieke vaardigheden aan de biologische evolutie van onze soort en onze voorgangers.

⁶ In sectie 3 zal ik terugkomen op de oud-Griekse houding ten aanzien van wiskunde en wetenschap.

Laat me een aantal voorbeelden geven om te illustreren hoe onze proto-wiskundige vermogens van nut kunnen zijn geweest in de voorbije evolutionaire stadia van onze soort. Het kunnen schatten en vergelijken van het aantal vruchten aan verschillende bomen draagt bij aan efficiënte fouragepatronen. Hetzelfde geldt voor het herkennen van regionale en seizoensgebonden⁷ patronen in de bloeiwijze van planten en de trek van dieren. En het vermogen om toekomstige handelingen te kunnen plannen (in plaats van enkel te kunnen reageren op onmiddellijke prikkels) vereist een ruwe vorm van extrapolatie uit vroegere waarnemingen. Deze trekken, die evolutionair voordelig zijn gebleken, liggen aan de basis van ons huidige vermogen tot abstract denken en vooruitziend handelen.

Onze huidige vaardigheden zijn geavanceerd, maar beperkt. Laten we eerst onze capaciteiten op het vlak van extrapolatie eens beoordelen: onze toekomstvoorspellingen zijn verre van perfect. Soms slagen we er niet in om alle relevante factoren in rekening te brengen, of we worden geconfronteerd met een systeem dat weliswaar deterministisch is, maar dat intrinsiek chaotisch gedrag vertoont. Denk bijvoorbeeld aan de gedeeltelijke zonsverduistering van 20 maart 2015. De eclips zelfs konden we vele jaren op voorhand in onze agenda zetten, maar of het weer goed genoeg zou zijn om het fenomeen vanop een vooraf bepaalde plaats op aarde waar te nemen, daar konden we nog geen week op voorhand zeker van zijn. Laten we dan kijken naar het meer basale cognitieve vermogen om patronen te herkennen. We zijn vatbaar voor patroonzucht (in het Engels *patternicity*), een geneigdheid waardoor we ook patronen menen te zien in toevallige correlaties [10]. Deze patroonzucht verklaart waarom we zo graag ‘verbind de punten’ spelen terwijl we naar de nachtelijke hemel kijken: ons brein is zo ingesteld dat we patronen zien in de sterren, ook al staan de objecten die we zo in sterrenbeelden groeperen vaak helemaal niet in elkaars buurt. Deze patronen zijn slechts schijnbaar vanuit onze positie op aarde.

In ons evolutionaire verleden was het voordeel dat het correct identificeren van veel patronen opleverde groter dan het nadeel teweeggebracht door vals-positieven. In het geval van een tijger is het duidelijk dat één vals-negatief dodelijk kan zijn. Maar het verhogen van het aantal terecht positieve resultaten leidt er steevast toe dat ook het aantal vals-positieven toeneemt.⁸

Als soort moeten wij het stellen zonder gif en zonder een exoskelet, helaas, maar wij hebben hogere cognitieve vermogens die ons toelaten onze acties te plannen en om wiskunde te ontwikkelen. Deze eigenschappen zijn de sleutel voor onze overleving (al biedt success in het verleden geen garantie voor onze bestendigheid in de toekomst). Opgesomd is wiskunde een vorm van menselijk redeneren – de meest gesofisticeerde van zijn soort. Wanneer deze manier van redeneren gecombineerd wordt met empirische feiten, dan zouden we niet perplex moeten staan dat dit ons – af en toe – in staat stelt om aspecten van de natuurlijke wereld op een effectieve manier te beschrijven en zelfs te voorspellen. Het feit dat ons denken succesvol kan worden toegepast met dit doel is precies waarom de onderliggende eigenschappen geselecteerd werden in onze biologische evolutie.

2.2 Wiskunde als ingesnoerde verbeelding

In mijn zienswijze draait wiskunde om het exploreren van hypothetische structuren. Waar komen deze structuren dan vandaan? Wel, sommige zijn directe abstracties van objecten of processen in de werkelijkheid, maar ze kunnen ook geïnspireerd zijn door de werkelijkheid op een meer indirecte manier. We kunnen bijvoorbeeld starten met een abstractie van een echt object of proces om

⁷ Of ‘spatiotemporeel’ als je wil klinken zoals een fysicus.

⁸ Dezelfde wisselwerking treedt bijvoorbeeld ook op bij medische testen en in rechtszaken.

vervolgens één of meerdere van de eigenschappen ervan te ontkennen – denk maar aan de voortdurende wiskundige obsessie met het oneindige (letterlijk het niet-eindige). Voorbeelden waarin er zo'n expliciete negatie optreedt demonstreren duidelijk dat het doel van wiskunde niet is om de echte wereld weer te geven of om de natuurwetenschappen vooruit te helpen. Desondanks kan deze speelse en vrije oefening in zuivere wiskunde – initieel onbedoeld en finaal onverwacht – toepasbaar blijken op abstracties van objecten en processen in de werkelijkheid, en wel compleet andere dan degene waar we van waren gestart. Zo bekeken lijkt de effectiviteit van wiskunde zeker onredelijk. Ik argumenteer echter dat er bijkomende factoren in het spel zijn die dit succes kunnen verklaren, waardoor deze onbedoelde toepassingen van wiskunde alsnog waarschijnlijker worden.

Laat ons nu terugkeren naar de speelgoedmetafoor, waarbij we voor de duidelijkheid aannemen dat de natuurwetenschappelijke puzzel een vlakke legpuzzel is. Uiteraard hoeft dit wiskundigen er niet van te weerhouden om hoger-dimensionale puzzels te bedenken; hun bezigheid betreft immers een puur denkbeeldig spel, ongehinderd door al die empirische puzzelstukjes. Anderzijds is het aannemelijk dat de aanvankelijke inspiratie om bijvoorbeeld donutvormige of hyperkubische puzzels te beschouwen ingegeven kan zijn door problemen om de empirische stukjes in een vlakke configuratie te leggen.⁹ Bovendien kan dit puur wiskundige construct, ongeacht de reden waarom het ooit werd bedacht, vervolgens aanleiding geven tot speculaties over de status van de wetenschappelijke puzzel. Dit soort terugkoppelingsprocessen leidt ertoe dat het verbeeldingspel niet zo vrij is als we aanvankelijk misschien hadden aangenomen. De hypothetische structuren van de wiskunde worden niet bedacht vanuit een fysisch of conceptueel vacuüm. Zelfs in de zuivere wiskunde werkt dit selectiemechanisme zeer dicht in bij haar bron van vernieuwing en creativiteit.

Wiskunde evolueert door variaties van eerdere ideeën te beschouwen en te selecteren. Net als in de biologie levert deze variatie veelal onvruchtbare resultaten op. Evolutie is spijzuchtig – de tegenpool van efficiëntie. Het selectieproces wordt hier hoofdzakelijk aangedreven door culturele factoren, inwendig aan de wiskunde (waarbij de voorkeur uitgaat naar resultaten die bepaalde epistemische deugden bezitten, zoals schoonheid en eenvoud). Zoals we zagen in de vorige paragraaf spelen empirische factoren echter ook een rol, gemedieerd via externe relaties met de wetenschappen. Hoewel wiskunde vaak wordt beschreven als een a-prioristische activiteit, onbezoedeld door enige empirische invloed, is deze beschrijving zelf een idealisatie. In werkelijkheid is er geen a priori.

2.3 Wiskunde bedient de wetenschap vaker niet dan wel

Voor elke abstractie zijn er veel variaties mogelijk, waarvan het merendeel helemaal niet toepasbaar is op onze wereld. De effectiviteit zoals gezien door Wigner [4] kan het gevolg zijn van nog een andere vorm van selectievertekening: eentje die ons doet focussen op de winners, niet de missers. Bovendien zijn zelfs de wetenschappelijke toepassingen van wiskunde die algemeen beschouwd worden als hoogst succesvol beperkt in hun toepassingsgebied en zelfs daarbinnen beperkt in accuraatheid.

Van de boeken die in wiskundige bibliotheken staan zijn er veel gevuld met theorieën waarvoor niet één praktische toepassing gevonden is.¹⁰ We zouden de efficiëntie van wiskunde voor de natuurwetenschappen als volgt kunnen meten: deel het aantal pagina's die wetenschappelijk toepasbare resultaten bevatten door het totale aantal pagina's geproduceerd door zuivere wiskunde.

⁹ In dit voorbeeld is het overwegen van de negatie van de aanname van vlakheid (zoals bij de niet-Euclidische meetkunde) – en niet één van de andere achterliggende aannames – ingegeven door problemen in de fysica.

¹⁰ Dit is natuurlijk prima, aangezien dat ook niet het doel is van de wiskunde.

Mijn vermoeden is dat de efficiëntie volgens deze definitie zeer laag is. In de vorige sectie zagen we dat onderzoek, zelfs in de zuivere wiskunde, beïnvloed wordt door thema's uit de natuurwetenschap. Als we dat in rekening brengen, dan is de effectiviteit van wiskunde in de wetenschappen inderdaad onredelijk – onredelijk laag welteverstaan.¹¹

Misschien is het niet fair om zuivere wiskunde te vermelden in de voorgestelde maat voor efficiëntie? Een groot deel van het huidige wiskundige corpus handelt over toegepaste wiskunde, van differentiaalvergelijkingen tot biostatistiek. Als we de efficiëntie meten door het aantal wetenschappelijk toepasbare pagina's te delen door het totale aantal pagina's geproduceerd in alle takken van de wiskunde, dan krijgen we zeker een veel hoger percentage. Maar ook dan lijkt de effectiviteit van de wiskunde in de natuurwetenschappen alleszins redelijk, aangezien onderzoek en publicaties in de toegepaste wiskunde (terecht) neigen naar toepasbaarheid op de echte wereld.

Op dit punt kan je tegenwerpen dat Wigner een kwalitatief punt maakte dat er een deel van de wiskunde is dat goed werkt, zelfs als dit niet alles of het meeste van de wiskunde betreft. Ik heb sympathie voor dit tegenargument (en het huidige punt is het minst belangrijke in mijn argumentatie), maar dan vraag ik me af wat hier de relevante contrastklasse is: dat niets van de wiskunde iets in het universum zou beschrijven? In sectie 3 speculeer ik hierover.

2.4 Overvloedige vrijheidsgraden in het toepassen van wiskunde: het voorbeeld van infinitesimalen

Natuurwetenschappers trachten hun theorieën op een wiskundig precieze manier te formuleren. Het lijkt dus terecht dat we de natuurwetenschappen ook wel de 'exacte wetenschappen' te noemen. Anderzijds laten de natuurwetenschap ook afwijkingen toe van volledige wiskundige rigueur – vaak vereist ze dit zelfs. Heel wat praktijken die aanvaardbaar zijn voor fysici – zoals berekeningen van grootteordes, schattingen van fouten en vage manieren van spreken in termen van infinitesimalen – worden afkeurend bekeken door wiskundigen. Bovendien hebben al onze empirische methodes een beperkt bereik en dito gevoeligheid, waardoor alle experimenten aanleiding geven tot meetfouten. Als je het zo bekijkt, kan je ontkennen dat eender welke empirische wetenschap volledig exact kan zijn. In het bijzonder kunnen systematische afwijkingen tussen onze modellen en de eigenlijke wereld lang aan het zicht onttrokken blijven, als de effecten maar voldoende klein zijn in relatie tot onze huidige achtergrondtheorieën en empirische technieken.

Om dit punt te illustreren zal ik me concentreren op de calculus – de tak van de wiskunde die zich bezighoudt met differentiaal- en integraalvergelijkingen – en de rol bekijken die infinitesimalen spelen in de wiskunde enerzijds en in de natuurkunde anderzijds.

In de wiskunde speelden infinitesimalen een belangrijke rol tijdens de ontwikkeling van de calculus, vooral in het werk van Leibniz [11], maar ook in dat van Newton (waar ze 'verdwijnde incrementen' genoemd werden) [12]. De ontwikkeling van de infinitesimaalrekening was gemotiveerd door vraagstukken uit de natuurkunde: zowel geometrische problemen in de context van de optica als dynamische problemen met betrekking tot de mate van verandering van grootheden. Berkeley [13] bespote de infinitesimalen als de "geesten van overleden hoeveelheden". Het heeft lang geduurd om een consistente definitie te vinden van dit concept dat voldoet aan de huidige standaard van wiskundige gestrengheid, maar inmiddels is dat wel gelukt [14]. De

¹¹ Op dit punt raad ik aan om mee te neuriën met een nummer van Shania Twain: "So, you're a rocket scientist. That don't impress me much." Als je te jong bent om dit liedje te kennen, raadpleeg dan je innerlijke tiener voor de gepaste dosis van niet-onder-de-indruk-zijn.

hedendaagse definitie van infinitesimalen plaatst hen in de context van een onvolledig, geordend veld van ‘hyperreële’ getallen, dat niet-Archimedis is: in tegenstelling tot de reële getallen bevat deze verzameling getallen die oneindig klein zijn maar verschillend van nul – infinitesimalen dus. De alternatieve calculus gebaseerd op de hyperreële getallen wordt ook wel ‘niet-standaard analyse’ (NSA) genoemd. In vergelijking met de standaard analyse staat deze theorie conceptueel dicht bij het oorspronkelijke werk van Leibniz.

Terwijl infinitesimalen (in de specifieke betekenis hierboven) lang verbannen zijn uit de hoofdstroom van de wiskunde, bleven ze wel in zwang binnen de wetenschappen, met name in de fysica: niet enkel in het informele discours, maar ook in de didactiek, verklaringen en kwalitatieve redeneringen. Het is weleens geopperd dat NSA een *post hoc* rechtvaardiging kan aanleveren voor de manier waarop infinitesimalen gebruikt worden in de fysica [15]. NSA lijkt inderdaad een aantrekkelijk raamwerk te bieden voor theoretische fysica: het respecteert hoe fysici toch al denken over afgeleiden, differentiaalvergelijking, reeksontwikkelingen en zo meer, én het is volledig rigoureu.¹²

Het herformuleren van bekende resultaten in de taal van NSA kan nieuwe inzichten opleveren. NSA kan bijvoorbeeld gebruikt worden om klassieke limieten in de natuurkunde beter te begrijpen: klassieke mechanica kan gemodelleerd worden als een gekwantiseerde mechanica met infinitesimale Planck-constante [21]. Op een gelijkaardige manier kan de Newtoniaanse mechanica gemodeleerd worden als een relativiteitstheorie met een oneindig grote maximumsnelheid, c (infinitesimale $1/c$).

Infinitesimale getallen zijn in zekere zin ononderscheidbaar van nul (als je ze afrondt naar reële getallen bekom je nul), maar strikt verschillend van nul (zoals expliciet gemaakt kan worden binnen de hyperreële getallen). Dit is suggestief voor een fysische interpretatie van infinitesimalen als ‘momenteel niet-observeerbare grootheden’. De ontologische status van niet-observeerbare grootheden is een belangrijk onderwerp in het realisme–anti-realisme debat [22]. Terwijl constructief-empiristen ‘observeerbaarheid’ interpreteren als ‘detecteerbaarheid met de menselijke zintuigen’ (zonder technische hulpmiddelen) [23], beschouwen realisten ‘observeerbaarheid’ als een vaag, contextafhankelijk begrip [24]. Als een toestel met beter scheidend vermogen wordt ontwikkeld, dan worden sommige grootheden die voordien onobserveerbaar klein waren alsnog observeerbaar [25, 26]. Deze verschuiving in het onderscheid tussen wat wel en niet observeerbaar is kan ook gemodeleerd worden met een vorm van NSA, die ‘relatieve analyse’ wordt genoemd, waarin dit overeenkomt met een overstap naar een fijner contextniveau (een technische term uit deze theorie) [27]. Dit vereist dat de bestaande, statische theorie uitgebreid wordt met nieuwe principes die de toegestane dynamica vastleggen [28].

De interpretatie van (relatieve) infinitesimalen als (momenteel) niet-observeerbare grootheden is suggestief voor waarom de calculus zo toepasbaar is in de natuurwetenschappen: het lijkt erop dat infinitesimalen aan wetenschappers de flexibiliteit bieden die nodig is om wiskundige theorieën toe te passen op de empirisch toegankelijke wereld. Om terug te keren naar de legpuzzelanalogie van sectie 1: we hebben een zekere mate van speling nodig aan de randen van de puzzelstukken. Als de pasvorm te strak is, wordt het onmogelijk om de stukjes in elkaar te passen. Op een vergelijkbare manier zorgen infinitesimalen voor de nodige speling in het wetenschappelijke raderwerk.

¹² Het is aangetoond dat natuurkundige problemen geherformuleerd kunnen worden in termen van NSA [16], zowel in de context van de klassieke fysica (Lagrangiaanse mechanica [17]) als van de kwantummechanica (kwantumveldentheorie [18], spinmodellen [19], relativistische kwantummechanica [20] en verstrooiing [17]). Naast formele aspecten (wiskundige gestrengheid) biedt zo’n vertaling ook meer substantiële voordelen, zoals gemakkelijkere (kortere) bewijzen.

3. Een speculatieve vraag betreffende het ondenkbare

Had onze kosmos anders kunnen zijn – zo anders dat het geven van een wiskundige beschrijving ervan fundamenteel onmogelijk zou zijn (en dit los van de vraag of er leven in had kunnen staan)? Sommige lezers kunnen de indruk hebben dat ik slechts onderwerpen in de buurt van dit mysterie heb verkend, zonder de kern ervan rechtstreeks te bespreken.

Vooraleer ik me uitleef met deze speculatie, kan het nuttig zijn om in herinnering te brengen dat de notie van een 'kosmos' is ontstaan in de oud-Griekse filosofie, in de school van Pythagoras, waar het begrip verwees naar de ordening van het heelal (niet het heelal zelf). Het is nauw verwant aan de zoektocht naar *archai* of fundamentele, ordenende principes. Het is welbekend dat de pythagoreeërs de gehele getallen en – bij uitbreiding – de wiskunde zagen als het ordenende principe van het universum. Hun speculaties over een wiskundig harmonieuze muziek der sferen resoneerde bij Plato en later bij Johannes Kepler (de grote astronoom, maar ook de laatste grote neoplatonist). Aangezien deze *archai* begrijpelijk dienden te zijn voor mensen, en dit zonder goddelijke interventie of mystieke revelatie, moesten ze beperkt in aantal en elk voldoende eenvoudig zijn. Het idee dat de natuurwetten zo kernachtig moeten zijn dat ze op het voorpand van een T-shirt passen is dus veel ouder dan de uitvinding van het T-shirt.¹³ In deze zin is het antwoord op de speculatieve vraag aan het begin van deze sectie 'nee' en dat om een triviale reden: anders zou het geen kosmos zijn. Maar zelfs als we 'onze kosmos' interpreteren als 'het universum' is er een sterke culturele tendens om de speculatieve vraag in negatieve zin te beantwoorden.

In sectie 2.1 beschouwde ik onze proto-wiskundige vermogens en hun beperkingen. Ten minste in sommige domeinen doen onze voorspellingen het beter dan wilde gokken. Dit lijkt erop te wijzen dat er patronen in de wereld zelf zitten – misschien niet de patronen die wij eraan toeschrijven, aangezien we wel eens falen –, maar patronen desalniettemin. Vervolgens wordt het vaak als vanzelfsprekend aangenomen dat deze patronen wiskundig van aard zijn, maar volgens mij is dat een substantiële bijkomende aanname. Volgens mijn visie op wiskunde komt deze volgende stap erop neer dat de natuur zelf – ten minste in principe – begrijpelijk is voor mensen. Ik denk echter dat al wat we begrijpen over de natuur louter onze voorstellingen ervan zijn.¹⁴ Uiteindelijk is de realiteit niet iets dat te begrijpen is, maar slechts iets dat is. (En waar wij deel van zijn.)

Als we ons een wereld trachten voor te stellen die onze wiskundige lenigheid te buiten gaat, dan is het verleidelijk om te denken aan een wereld die volledig willekeurig is. Deze poging is echter tevergeefs. Volledige willekeur (in het Engels *randomness*) is een menselijke idealisatie van maximaal onvoorspelbare uitkomsten (zoals bij een perfect eerlijke loterij [29]). Zulke willekeurige processen zijn echter zeer welgemanierd: hoewel ze bestaan uit gebeurtenissen die maximaal onvoorspelbaar zijn als je ze elk apart beschouwt, leveren ze collectief sterke regelingen op. Het is voor ons niet langer een mysterie hoe orde uit chaos ontstaat. Daar hebben we zelfs hele takken van de wiskunde voor, kansrekening en statistiek genaamd, die ook nauw verband houden met bepaalde takken van de fysica, zoals de statische mechanica.

¹³ Voor het geval je je dit nu afvraagt: het T-shirt is ongeveer een eeuw geleden uitgevonden.

¹⁴ Mijn visie op wiskunde kan de volgende vraag oproepen: "Waarom, dan, zouden we moeten verwachten dat iets menselijks en abstracts als wiskunde van toepassing is op de concrete realiteit?" Ik denk dat deze vraag gestoeld is op een fout uitgangspunt, ten gevolge van een langdurige blootstelling aan het platonisme – waarvan de overblijfselen alomtegenwoordig zijn in onze cultuur.

Als tweede poging zouden we een Dalí-achtige wereld kunnen voorstellen, waarin elementen gecombineerd worden op ongeziene wijzen en waarin de logica halverwege lijkt te veranderen: starre klokken worden vloeibaar, olifanten krijgen spinnenpoten en tijgers verschijnen uit de monden van vissen die voortspruiten uit een granaatappel. En toch hebben zelfs zulke surrealistische tableaux hun eigen meta-regelmatigheden. Veel mensen zijn in staat om een schilderij van Salvador Dalí meteen als zijn werk te herkennen, ook al hebben ze dit specifieke doek nog niet eerder gezien. Aangezien we gestart zijn van menselijke kunstwerken hoeft het ons niet te verbazen dat deze strategie tekortschiet om onze eigen ingesnoerde verbeelding een stap voor te blijven.

Hooguit kan ik me een wereld voorstellen waarin processen niet op een zinvolle manier samengevat of benaderd kunnen worden. Onze vorm van intelligentie is gericht op het vinden van de essentie in informatiestromen, en dat zou ons niet van pas komen in deze wereld (waarin het ook niet spontaan zou ontstaan door biologische evolutie). In elk geval is wat ik me kan voorstellen van zo'n wereld erg vaag – onvoldoende voor enige wiskundige beschrijving. Misschien bestaan er ergens betere voorstellen?

Max Tegmark heeft een indringend beeld opgeroepen van het ultieme multiversum, dat zou bestaan uit alle ordeningen die wiskundig mogelijk zijn [30]. Dit vertegenwoordigt een zeer weelderige menigvuldigheid. Vanuit mijn standpunt over wiskunde als ingesnoerde verbeelding is het idee van een wiskundig multiversum echter nog steeds beperkt tot wat denkbaar is door ons, mensen. Aristoteles heeft ons omschreven als denkende dieren, maar voor de huidige doeleinden past de omschrijving 'mathematiserende mammalia' nog beter. Mijn diagnose van de situatie is dat de speculatieve vraag ons oproept om dapper verder te gaan, nog voorbij Tegmarks multiversum, en alzo vereist dat we de limieten van onze cognitieve kungfu te overstijgen. Maar zelfs met wiskunde kunnen we niet het ondenkbare denken.

4. Besluit

In dit essay heb ik beargumenteerd dat:

- wij geselecteerd zijn (2.1);
- onze wiskunde geselecteerd is (2.2);
- de toepassing van wiskunde vrijheidsgraden heeft bovenop degene die intrinsiek zijn aan de wiskunde zelf (2.4);
- en dat, ondanks alle vorige punten, effectieve toepassingen van wiskunde eerder uitzondering dan regel blijven (2.3).

Al te vaak hebben natuurkundigen fenomenen lineair benaderd en zichzelf goden gewaand, om later veel rijkere boventonen van deze fenomenen te ontdekken. Laat dit een les zijn in bescheidenheid. Terwijl we aan het spelen zijn, kunnen de dingen ons zeer eenvoudig toeschijnen, maar we moeten de volgende parafrase van J.L. Austin¹⁵ indachtig zijn: niet de natuur, maar de wetenschappers zijn simpel.

¹⁵ Oorspronkelijk citaat van J.L. Austin, 1979 [31]: *"It's not things, it's philosophers that are simple."*

VRIJWARINGSCLAUSULE

Er zijn geen parallele universa gepostuleerd tijdens het schrijven van dit essay.

DANKWOORD

Wetenschap is een spel met meerdere spelers. Daarom ben ik Danny E.P. Vanpoucke dankbaar voor zijn feedback op een eerdere versie van dit essay. We spelen weliswaar met echt geld. Dit werk werd financieel ondersteund door een Veni-beurs van de Nederlandse organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO project "*Inexactness in the exact sciences*" 639.031.244).

HERKOMST VAN DEZE TEKST

Dit is een eigen vertaling van mijn essay "*Children of the Cosmos*" dat de eerste prijs heeft behaald in de 2015 essaywedstrijd van het *Foundational Questions Institute* (FQXi.org): "*Trick or Truth: the Mysterious Connection Between Physics and Mathematics*".
(URL: <http://fqxi.org/community/essay/winners/2015.1>)

LITERATUURLIJST

- [1] A. Einstein, letter to Hans Muesham, July 9, 1951; Einstein archives 38-408; cited in: Alice Calaprice (ed.) *The Ultimate Quotable Einstein*, Princeton, N.J.: Princeton University Press (2011).
- [2] J. Spence, *Anecdotes, Observations, and Characters of Books and Men* (1820).
- [3] A.A. Martinez, *Science Secrets*, University of Pittsburgh Press (2011) 274–275.
- [4] E.P. Wigner “The unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences”, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **13** (1960) 1–14.
- [5] S. Wenmackers and D.E.P. Vanpoucke, “Models and simulations in material science: two cases without error bars”, *Statistica Neerlandica* **66** (2012) 339–355.
- [6] I. Stewart, J. Cohen, and T. Pratchett, *The Science of Discworld II: The Globe*, Ebury Press (2002).
- [7] O. Neurath, “Protokollsätze”, *Erkenntnis* **3** (1933) 204–214.
- [8] S. Dehaene, *The Number Sense; How the Mind Creates Mathematics*, Oxford University Press (1997).
- [9] R. Rugani, G. Vallortigara, K. Priftis, and L. Regolin, “Number-space mapping in the newborn chick resembles humans’ mental number line”, *Science* **347** (2015) 534–536.
- [10] M. Shermer, “Patternicity”, *Scientific American* **299** (2008) 48.
- [11] G.W. Leibniz, “Nova Methodus pro Maximis et Minimis, Itemque Tangentibus, qua nec Fractas nec Irrationales Quantitates Moratur, et Singular pro illi Calculi Genus”, *Acta Eruditorum* (1684).
- [12] I. Newton, “Introductio ad Quadraturum Curvarum”, chapter in: *Opticks or, a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light. Also Two Treatises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures*, London (1704).
- [13] G. Berkeley, *The Analyst; or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*, printed for J. Tonson in the Strand, London (1734).
- [14] A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam (1966).
- [15] S. Sanders, “More infinity for a better finitism”, *Annals of Pure and Applied Logic* **161** (2010) 1525–1540.
- [16] S. Albeverio, J.E. Fenstad, R. Høegh-Krohn, and T. Lindstrøm (eds), *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, Academic Press, Orlando (1986).
- [17] F. Bagarello and S. Valenti, “Nonstandard analysis in classical physics and quantum formal scattering”, *International Journal of Theoretical Physics* **27** (1988) 557–566.
- [18] P.J. Kelemen, “Quantum mechanics, quantum field theory and hyper-quantum mechanics”, chapter in: *Victoria Symposium on Non-Standard Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 369, Springer, Berlin (1974).
- [19] L.L. Helms and P.A. Loeb, “Application of nonstandard analysis to spin models”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **69** (1969) 341–352.
- [20] C.E. Francis, “Application of nonstandard analysis to relativistic quantum mechanics”, *Journal of Physics A* **14** (1981) 2539–2251.
- [21] R.F. Werner and P.H. Wolff, “Classical mechanics as quantum mechanics with infinitesimal \hbar ”, *Physics Letters A* **202** (1995) 155–159.
- [22] A. Kukla, “Observation”, chapter in: S. Psillos and M. Curd (eds), *The Routledge Companion to Philosophy of Science*, Routledge, London (2010) 396–404.
- [23] B.C. van Fraassen, *The Scientific Image*, Oxford University Press (1980).
- [24] G. Maxwell, “The ontological status of theoretical entities”, chapter in: H. Freigl and G. Maxwell (eds), *Scientific Explanation, Space, and Time*, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Vol. 3, University of Minnesota Press, Minneapolis (1962) 3–15.
- [25] I. Douven, *In defence of scientific realism*, Ph.D. dissertation, University of Leuven (1996).
- [26] T.A.F. Kuipers, *From Instrumentalism to Constructive Realism*, Synthese Library: Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Vol. 287, Kluwer, Dordrecht (2000).
- [27] K. Hrbacek, O. Lessman, and R. O’Donovan, “Analysis with ultrasmall numbers”, *The American Mathematical Monthly* **117** (2010) 801–816.
- [28] S. Wenmackers, “Ultralarge lotteries: analyzing the Lottery Paradox using non-standard analysis”, *Journal of Applied Logic* **11** (2013) 452–467.
- [29] S. Wenmackers and L. Horsten, “Fair infinite lotteries”, *Synthese* **190** (2013) 37–61.
- [30] M. Tegmark, “The Mathematical Universe”, *Foundations of Physics* **38** (2008) 101–150.
- [31] J.O. Urmson and G.J. Warnock (eds), *J. L. Austin; Philosophical Papers*, Oxford University Press (1979) p. 252.